WISKUNDE voor bedrijfskundigen I-B
Theorie

Bachelor of Science in de handelswetenschappen
Schakelprogramma tot Master of Science in de handelswetenschappen
Universiteit Gent

Philippe Carette

Academiejaar 2019-2020

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 3

Differentiaalrekening

Veranderingen spelen een belangrijke rol in de economie. Immers, economische agenten laten zich in hun handelen vaak leiden door geconstateerde of verwachte veranderingen. Soms is het niet voldoende enkel te vast te stellen dat een bepaalde verandering zich heeft voorgedaan of dat een verandering zich zal voltrekken. Het kan voor een econoom belangrijk zijn te weten of een verandering een *toename* is of een *afname* en *hoe groot* deze is. In dit hoofdstuk behandelen we het mathematische begrip "afgeleide" van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als instrument voor het meten van veranderingen.

3.1 Differentiequotiënt

Als een variabele x van waarde verandert en we geven de verandering aan met Δx, dan stelt

$$x + \Delta x$$

de "nieuwe" waarde voor van deze variabele. Is $\Delta x > 0$, dan spreken we van een toename (stijging) van x en is $\Delta x < 0$, dan spreken we van een afname (daling) van de variabele x.

Als f een reële functie is van de variabele x en we geven met $\Delta f(x)$ de *verandering* aan van de functiewaarde $f(x)$ (als gevolg van de verandering Δx van x), dan geldt

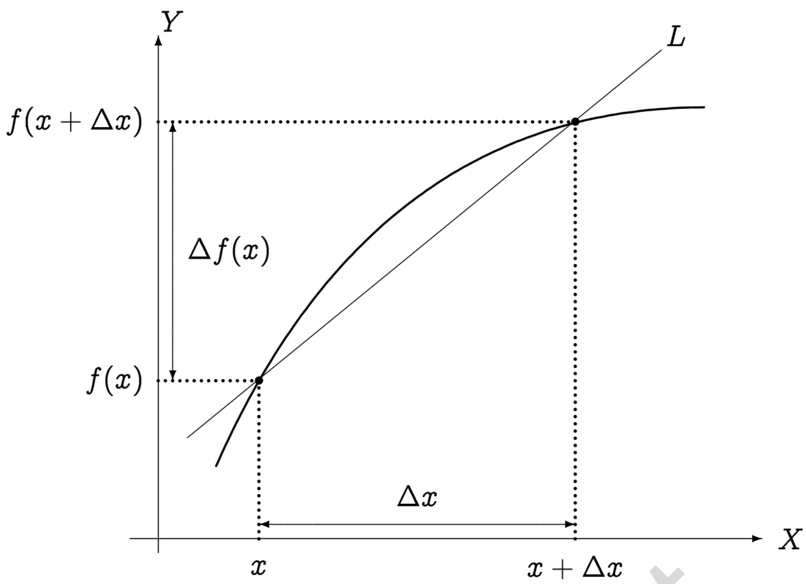
$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Het quotiënt

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

stelt de *gemiddelde verandering* (*per eenheid verandering in* x) voor van de functiewaarde $f(x)$ over het interval $[\,x, x + \Delta x\,]$ als $\Delta x > 0$ en over $[\,x + \Delta x, x\,]$ als $\Delta x < 0$. Het wordt in wiskundige termen het *differentiequotiënt van f in x bij de verandering Δx van x* genoemd.

Meetkundig gezien is $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ gelijk aan de *richtingscoëfficiënt* van de rechte L door de punten met coördinaten $(x, f(x))$ en $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Het differentiequotiënt is dus een maat voor de "steilheid" van de grafiek over een interval.



Voorbeelden

- Het differentiequotiënt van de vraagfunctie $q = f(p) = 5 - \frac{1}{4}p$ in p_0 bij een verandering Δp van de prijs is

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(p_0)}{\Delta p} &= \frac{f(p_0+\Delta p) - f(p_0)}{\Delta p}\\ &= \frac{\left[5 - \frac{1}{4}(p_0+\Delta p)\right] - \left[5 - \frac{1}{4}p_0\right]}{\Delta p}\\ &= \frac{-\frac{1}{4}\Delta p}{\Delta p} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

  Dit quotiënt hangt af van p_0 noch van Δp. Per eenheid prijsstijging zal de vraag afnemen met gemiddeld $\frac{1}{4}$ eenheid van het goed, ongeacht het prijsniveau p_0.

- Het differentiequotiënt van de kostenfunctie K met

$$K(q) = 2q^3 - 18q^2 + 60q + 50 \quad (q \geq 0)$$

  bij een productieomvang van q_0 eenheden en een verandering van de productieomvang met Δq eenheden is gelijk aan

$$\begin{aligned}\frac{\Delta K(q_0)}{\Delta q} &= \frac{K(q_0+\Delta q) - K(q_0)}{\Delta q}\\ &= \frac{1}{\Delta q}\Big(\left[2(q_0+\Delta q)^3 - 18(q_0+\Delta q)^2 + 60(q_0+\Delta q) + 50\right]\\ &\qquad - \left[2q_0^3 - 18q_0^2 + 60q_0 + 50\right]\Big)\\ &= \frac{1}{\Delta q}\Big(2\left((q_0+\Delta q)^3 - q_0^3\right) - 18\left((q_0+\Delta q)^2 - q_0^2\right) + 60\Delta q\Big)\\ &= 2\,\frac{(q_0+\Delta q)^3 - q_0^3}{\Delta q} - 18\,\frac{(q_0+\Delta q)^2 - q_0^2}{\Delta q} + 60\\ &= 2\left(3q_0^2 + 3q_0\Delta q + (\Delta q)^2\right) - 18\left(2q_0 + \Delta q\right) + 60\end{aligned}$$

$$= 6q_0^2 - 36q_0 + 60 + (6q_0 - 18)\Delta q + 2\,(\Delta q)^2$$

Zo is het differentiequotiënt bij een productieomvang van 10 eenheden:

$$\frac{\Delta K(10)}{\Delta q} = 300 + 42\Delta q + 2\,(\Delta q)^2.$$

Dit quotiënt stelt de gemiddelde kostenverandering per eenheid productie voor, indien de productieomvang van 10 eenheden met Δq eenheden wordt gewijzigd.

3.2 Differentieerbare functies in een punt

Uit de meetkundige interpretatie van het differentiequotiënt is duidelijk dat een gemiddelde verandering van de functiewaarde $f(x)$ (als gevolg van de verandering Δx van x) afhangt van de grootte van de verandering Δx. Indien we nu in het differentiequotiënt $\Delta f(x)/\Delta x$ de verandering Δx steeds kleiner nemen en het differentiequotiënt nadert tot een getal, dan kunnen we dit getal interpreteren als een maat voor het tempo waarmee de functiewaarde $f(x)$ in x verandert. Dit motiveert de volgende definitie:

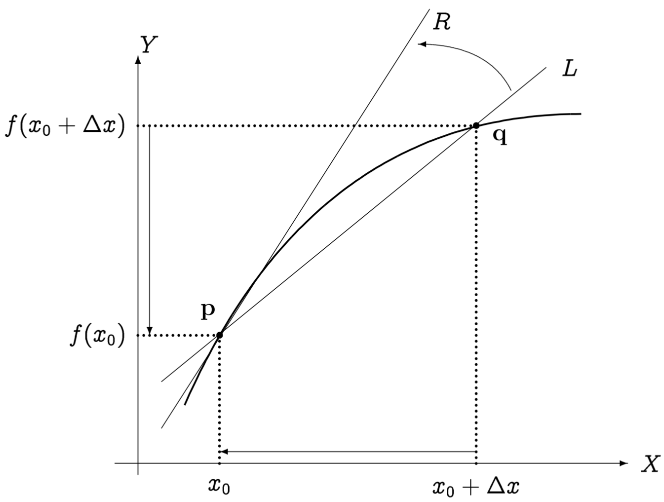
Definitie

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ een reële functie en $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Men noemt f *differentieerbaar* (of *afleidbaar*) *in* x_0 als en slechts als $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ bestaat en een reëel getal is. In dit geval noemt men deze limiet de *afgeleide van* f *in* x_0 en noteert men deze als $f'(x_0)$:

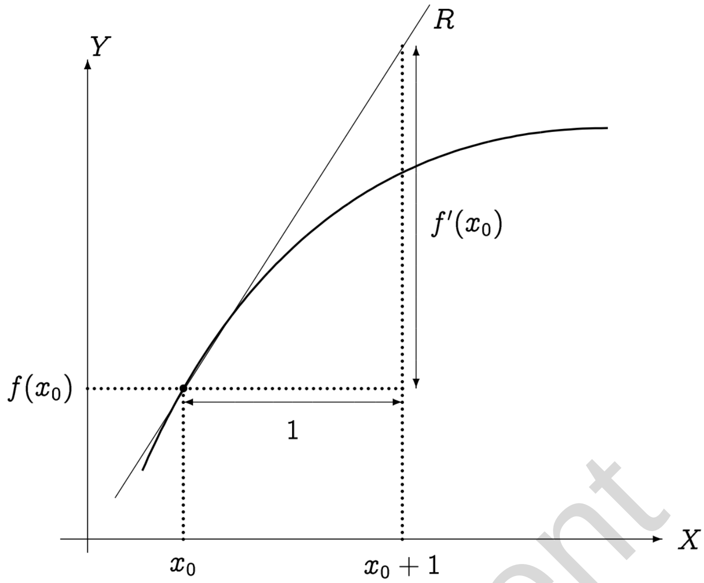
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Zoals opgemerkt in §3.1 stelt het differentiequotiënt $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ de richtingscoëfficiënt voor van de rechte L door de punten $\underline{p}$ en $\underline{q}$ met respectievelijke coördinaten $(x_0, f(x_0))$ en $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Als we de verandering Δx naar nul laten streven, dan nadert het punt $\underline{q}$ tot het (vaste) punt $\underline{p}$ en gaat de rechte L over in de raaklijn R aan de grafiek van f in het punt $\underline{p}$:



Indien $f'(x_0)$ bestaat, is zij dus niets anders dan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn R aan de grafiek van f door het punt met coördinaten $(x_0, f(x_0))$:



De vergelijking van deze raaklijn R is dan gegeven door

$$R: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Opmerkingen

- Indien f differentieerbaar is in elk punt van het open interval $]\,a, b\,[$, dan zeggen we dat f *differentieerbaar* is *over* $]\,a, b\,[$.
- Als f niet differentiaarbaar is in x_0, maar

  $$\lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  bestaat en is een reëel getal, dan noemen we deze limiet de *rechterafgeleide van* f *in* x_0. Analoog, als

  $$\lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  bestaat en een reëel getal is, dan noemen we deze limiet de *linkerafgeleide van* f *in* x_0.
- Het is mogelijk dat

  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \{+\infty, -\infty\}$$

  terwijl de grafiek van f toch een raaklijn bezit in het punt $(x_0, f(x_0))$. In dit geval is de verticale rechte $x = x_0$ deze raaklijn. Als voorbeeld halen we de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = 0$ aan.

- Als f differentieerbaar is in x_0, dan is f continu in x_0.
  Inderdaad, onderstel f differentieerbaar in x_0, dan $x_0 \in \operatorname{dom} f$ en kunnen we aantonen dat $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ omdat voor alle $x \neq x_0$ geldt

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0),$$

  waaruit volgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{0} + f(x_0) \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

- Een functie die continu is in een punt hoeft niet differentieerbaar te zijn in dat punt.
  Beschouw bijvoorbeeld de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$. Deze is continu in 0, maar niet differentieerbaar in 0, want

$$\lim_{\Delta x \stackrel{>}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{>}{\to} 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{>}{\to} 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{>}{\to} 0} 1 = 1$$

  en

$$\lim_{\Delta x \stackrel{<}{\to} 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{<}{\to} 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{<}{\to} 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \stackrel{<}{\to} 0} (-1) = -1$$

  m.a.w. de rechter- en linkerafgeleide van f in 0 verschillen van elkaar.

3.3 Afgeleide functie

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ een reële functie.

Definitie

De *afgeleide functie van f* is de reële functie

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

met als domein de verzameling der reële getallen waarin f differentieerbaar is.

Andere gangbare notaties voor deze afgeleide functie zijn

$$\mathrm{D}f, \quad \mathrm{D}_x f, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{of} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f.$$

Wij zullen in deze cursus meestal de accentnotatie ($'$) en differentiaalquotiëntnotatie ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$) gebruiken.

Voorbeelden

- De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ heeft als afgeleide functie $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ en $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt immers dat

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)(x + \Delta x + x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}$$

- Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

  bijgevolg $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_0^+$.

- De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ is niet differentieerbaar in 0 (zie opmerking 5, p. 5). Verder geldt voor elke $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1
\end{aligned}$$

  en voor elke $x \in \mathbb{R}_0^-$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1
\end{aligned}$$

  zodat de afgeleide functie van f het volgend voorschrift heeft

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

  waarbij $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_0$.

De volgende tabel vat de afgeleiden van de belangrijkste elementaire functies samen.

$f(x)$		$f'(x)$
c	$(c \in \mathbb{R})$	0
x		1
$\sqrt{x}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
x^r	$(r \in \mathbb{R}_0)$	rx^{r-1}
e^x		e^x
a^x	$(a \in \mathbb{R}_0^+)$	$a^x \ln a$
$\ln x$		$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$		$-\sin x$

3.4 Differentieerregels

Het bepalen van de afgeleide functie f' uit de functie f wordt *differentiëren* of *afleiden* genoemd. In deze paragraaf worden de regels besproken voor het bepalen van de afgeleide van een functie die geen elementaire functie is.

Somregel Zij $f(x) = u(x) + v(x)$. Zijn u en v differentieerbaar in x, dan

$$\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

Scalairproductregel Zij $f(x) = c \cdot u(x)$ met $c \in \mathbb{R}$. Is u differentieerbaar in x, dan

$$\boxed{f'(x) = c \cdot u'(x)}$$

Productregel Zij $f(x) = u(x)v(x)$. Zijn u en v differentieerbaar in x, dan

$$\boxed{f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

Opmerking

De productregel hierboven kan men ook veralgemenen tot het product van drie functies:
Zij $f(x) = u(x)v(x)w(x)$. Zijn u, v en w differentieerbaar in x, dan

$$\boxed{f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)}$$

Quotiëntregel Zij $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Zijn u en v differentieerbaar in x en $v(x) \neq 0$, dan

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}}$$

Kettingregel Zij $f(x) = h(u)$ met $u = g(x)$. Is g differentieerbaar in x en h differentieerbaar in u, dan

$$\boxed{f'(x) = h'(u) \cdot u' = h'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Inverse-functieregel Zij f een injectieve functie met inverse functie f^{-1}. Is f differentieerbaar in x en $f'(x) \neq 0$, dan is f^{-1} differentieerbaar in $y = f(x)$ en

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

<u>Voorbeelden</u>

- $$\begin{aligned} \big(x^3 + \sqrt{x}\big)' &= \big(x^3\big)' + \big(\sqrt{x}\big)' \qquad \text{(somregel)} \\ &= 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \big(3\sqrt[5]{x}\big)' &= 3\,\big(\sqrt[5]{x}\big)' \qquad \text{(scalairproductregel)} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^{\frac{1}{5}-1} \\ &= \frac{3}{5}\,x^{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \big(x^2 e^x\big)' &= \big(x^2\big)' e^x + x^2\,\big(e^x\big)' \qquad \text{(productregel)} \\ &= 2xe^x + x^2 e^x \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(x^2e^x\cos x\right)' &= \left(x^2e^x\right)'\cos x + x^2e^x\,(\cos x)' \qquad \text{(productregel)}\\ &= \left(2xe^x + x^2e^x\right)\cos x + x^2e^x\,(-\sin x)\\ &= 2xe^x\cos x + x^2e^x\cos x - x^2e^x\sin x\end{aligned}$$

  Dit resultaat kan ook op de volgende (snellere) manier verkregen worden:

  $$\begin{aligned}\left(x^2e^x\cos x\right)' &= \left(x^2\right)'e^x\cos x + x^2\,(e^x)'\cos x + x^2e^x\,(\cos x)'\\ &\qquad \text{(veralgem. productregel)}\\ &= 2xe^x\cos x + x^2e^x\cos x - x^2e^x\sin x\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{(\ln x)'\sqrt{x} - \ln x\,(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \qquad \text{(quotiëntregel)}\\ &= \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} \qquad \text{(quotiëntregel)}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

- Om $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ te differentiëren, moeten we eerst opmerken dat f een samengestelde functie is. Immers,

  $$f(x) = h(u) \quad \text{met } h(u) = \sqrt{u} \text{ en } u = x^2+1.$$

  Vermits $h'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $u' = 2x$, levert toepassing van de kettingregel dan

  $$\begin{aligned}f'(x) &= h'(u)\cdot u'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

- **Gegeven:** de injectieve functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
  Gevraagd: $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

  In principe zou men dit probleem kunnen oplossen door eerst het voorschrift van de inverse functie f^{-1} te zoeken en daarna het beeld van deze inverse functie in 0 te berekenen. De vergelijking $y = x^3 - x^2 + x - 1$ kan echter niet expliciet naar x opgelost worden, zodat het voorschrift van f^{-1} zich niet eenvoudig laat bepalen!

  In dit geval kan men toch de oplossing vinden door de inverse-functieregel. Hierin stellen we dan $y = 0$ en $x = 1$ (immers: $f(1) = 0$, verifieer dit), en krijgen we

  $$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(1)}.$$

  Vermits verder $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ en dus $f'(1) = 2$, vinden we uiteindelijk

  $$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{2}.$$

Dankzij de differentieerregels kan de tabel op blz. 7 met afgeleiden van elementaire functies verder aangevuld worden met de afgeleiden van de volgende veelgebruikte functies:

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{Bgsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Bgcos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Bgtan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Bgcot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3.5 Logaritmisch differentiëren

Er bestaat een techniek die het differentiëren van een functie kan vereenvoudigen als deze functie producten, quotiënten en/of machten bevat. Deze techniek steunt op de volgende stelling.

Stelling

Is de functie f differentieerbaar in x en is $f(x) \neq 0$, dan

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Bewijs. Het bewijs wordt geleverd via de kettingregel:
Indien $f(x) > 0$, dan

$$(\ln|f(x)|)' = (\ln f(x))' = (\ln)'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

en als $f(x) < 0$, dan

$$(\ln|f(x)|)' = (\ln(-f(x)))' = (\ln)'(-f(x)) \cdot (-f(x))' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)).$$

In beide gevallen vinden we dus $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. □

Gevolg

Is de functie f differentieerbaar in x en is $f(x) \neq 0$, dan

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'.$$

Voorbeeld

- Gevraagd wordt $f'(x)$ te bepalen als $f(x) = \dfrac{(3x+2)^3}{(x^2+1)\sqrt[3]{9+x^5}}$.

  Het recht-toe-recht-aan differentiëren van deze functie houdt ondermeer het toepassen in van de productregel, de quotiëntregel en de kettingregel. Dit gecompliceerde werk kan verlicht worden via bovenstaande stelling en gevolg en via de eigenschappen van logaritmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(\ln \left| \frac{(3x+2)^3}{(x^2+1)\sqrt[3]{9+x^5}} \right| \right)' \quad \text{(gevolg)} \\ &= f(x) \cdot \left(\ln \frac{|3x+2|^3}{(x^2+1)\,|9+x^5|^{\frac{1}{3}}} \right)' \\ &= f(x) \cdot \left(3\ln|3x+2| - \ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln\left|9+x^5\right| \right)' \quad \text{(eig. log.)} \\ &= f(x) \cdot \left(3 \cdot \frac{3}{3x+2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5x^4}{9+x^5} \right) \quad \text{(stelling)} \\ &= \frac{(3x+2)^3}{(x^2+1)\sqrt[3]{9+x^5}} \cdot \left(\frac{9}{3x+2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{5x^4}{3(9+x^5)} \right) \end{aligned}$$

- Gevraagd wordt $f'(x)$ te bepalen als $f(x) = x^x$ $(x > 0)$.

  Een vaak voorkomende fout is te schrijven dat $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$, zich baserend op de formule $(x^r)' = rx^{r-1}$. Het essentiële punt is dat deze formule slechts opgaat voor *constante* machten $r \in \mathbb{R}$, terwijl we hier een *variabele* macht x hebben! De formule voor de afgeleide van a^x brengt al evenmin een oplossing, want daar is het grondtal a constant ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$), terwijl er in $f(x)$ een variabel grondtal x optreedt.

  De oplossing wordt gevonden via logaritmisch differentiëren:

$$\begin{aligned} (x^x)' &= x^x \cdot (\ln|x^x|)' \\ &= x^x \cdot (\ln x^x)' \quad (x > 0 \text{ ondersteld}) \\ &= x^x \cdot (x \ln x)' \\ &= x^x \cdot \left(x' \ln x + x(\ln x)'\right) \\ &= x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1+\ln x) \end{aligned}$$

3.6 Afgeleiden van hogere orde

Het proces dat aan een functie f de afgeleide functie f' associeert leidt onmiddellijk tot het begrip *afgeleide van orde n van f* $(n \in \mathbb{N})$.

Men definieert de afgeleide van orde 0 van f als

$$f^{(0)} = f,$$

m.a.w. de functie f zelf, terwijl de afgeleide van orde 1 gegeven wordt door

$$f^{(1)} = f'.$$

Verder definieert men voor alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)',$$

waarbij dus steeds geldt dat $\operatorname{dom} f^{(n+1)} \subset \operatorname{dom} f^{(n)}$.

Men spreekt ook over de *n-de afgeleide van f* in plaats van de afgeleide van orde n van f.

Voor $f^{(2)}$ noteert men dikwijls ook

$$f'' \quad \text{of} \quad \mathrm{D}^2 f \quad \text{of} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right).$$

3.7 De differentiaal

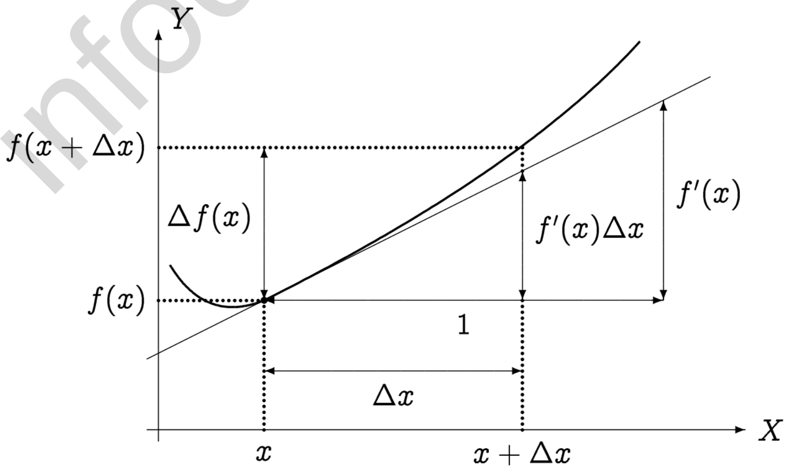
Indien f differentieerbaar is in x, dan geldt per definitie

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ of nog,

$$\Delta f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

op voorwaarde dat Δx voldoende klein is. De uitdrukking $f'(x) \cdot \Delta x$ speelt dus een belangrijke rol: ze is bij benadering gelijk aan $\Delta f(x)$ voor kleine afwijkingen Δx t.o.v. x. Deze benadering wordt beter naarmate Δx kleiner en kleiner wordt.



Uit de figuur kan men duidelijk zien dat, bij een verandering Δx van x, de uitdrukking $f'(x)\Delta x$ een benadering is van de reële verandering $\Delta f(x)$ van de functiewaarde. Aangezien, dicht bij x, de raaklijn in x aan de grafiek van f niet veel afwijkt van de grafiek zelf, vormt $f'(x)\Delta x$ dan ook een goede benadering van $\Delta f(x)$ mits Δx voldoende klein is. Men zegt dat de uitdrukking $f'(x)\Delta x$ de verandering van de functie f "gemeten langs de raaklijn" voorstelt.

Definitie

Noteren we een "kleine" verandering Δx van x als $\mathrm{d}x$ en is f differentieerbaar in x, dan wordt de uitdrukking

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\ \mathrm{d}x$$

de *differentiaal van f in x* genoemd.

Eigenschap

Is f differentieerbaar in x en stelt $\mathrm{d}x = \Delta x$ een "kleine" afwijking van x voor, dan

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \text{of nog,} \quad \Delta f(x) \approx \mathrm{d}f(x).$$

M.a.w. de differentiaal is de verandering van $f(x)$ langs de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(x, f(x))$ voor kleine veranderingen in x.

<u>Voorbeelden</u>

- $\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\ \mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}\sqrt{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$
- $\mathrm{d}\sin(x) = \cos x\ \mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}\,\mathrm{Bgtan}\,x = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

<u>Voorbeeld</u>

Gegeven de functie f met voorschrift

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Met welke waarde Δx moeten we de waarde $x = 8$ wijzigen opdat de functiewaarde $f(8)$ met 0,1 zou dalen?

We zoeken de waarde Δx die voldoet aan de vergelijking:

$$\overbrace{\left((8 + \Delta x) + \frac{1}{\sqrt[3]{8 + \Delta x}}\right)}^{f(8+\Delta x)} - \overbrace{\left(8 + \frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)}^{f(8)} = -0{,}1.$$

Omdat deze vergelijking lastig op te lossen is, benaderen we het linkerlid door $f'(8)\Delta x$ zoals aangegeven in de eigenschap hierboven. Hieruit volgt:

$$\Delta x \approx \frac{-0{,}1}{f'(8)}.$$

We vinden $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ en $f'(8) = 1 - \frac{1}{3}8^{-\frac{4}{3}} = \frac{47}{48}$, zodat

$$\Delta x \approx \frac{-0{,}1}{\frac{47}{48}} = -\frac{48}{470} \approx -0{,}102.$$

De variabele x moet dus met ongeveer 0,102 afnemen (dus van 8 naar 7,898) om de beoogde afname van 0,1 van de functiewaarde $f(8)$ te realiseren.

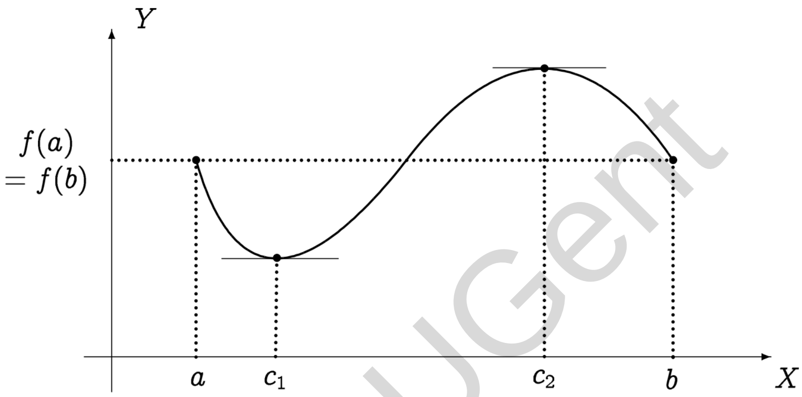
3.8 Stellingen van Rolle en Lagrange

Stelling van Rolle

Indien

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is op het gesloten interval $[a, b]$,
2. f differentieerbaar is op het open interval $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$,

dan bestaat er een getal $c \in]a, b[$ zodat $f'(c) = 0$.



Opmerking

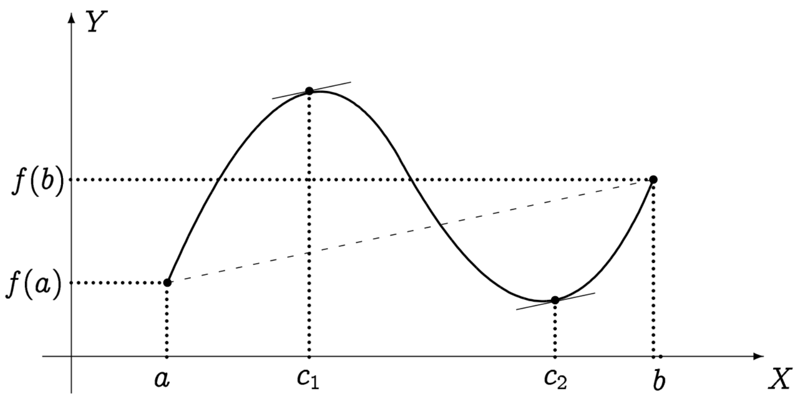
Geen enkele van de drie voorwaarden in de stelling van Rolle is overbodig! Laat men er één weg, dan kan de conclusie in het algemeen niet meer getrokken worden.

Stelling van Lagrange

Indien

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is op het gesloten interval $[a, b]$,
2. f differentieerbaar is op het open interval $]a, b[$,

dan bestaat er een getal $c \in]a, b[$ zodat $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Opmerking

De stelling van Rolle is een speciaal geval van de stelling van Lagrange. Anders geformuleerd zegt de stelling van Lagrange dat, indien er voldaan is aan de vermelde voorwaarden, er een getal $c \in]a, b[$ bestaat waarbij de raaklijn aan de grafiek van f in $(c, f(c))$ evenwijdig is aan de rechte door de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

3.9 De regel van de l'Hospital

Door de regel van de l'Hospital kunnen sommige limieten van het type $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ eenvoudig berekend worden met behulp van afgeleiden. De regel is geformuleerd in de volgende stelling:

Stelling

Zij $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Laat f en g twee functies zijn waarbij

1. er een omgeving V van a bestaat zodat f en g differentieerbaar zijn in $V \setminus \{a\}$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ of $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

dan

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mits deze laatste limiet bestaat.

Opmerkingen

- De stelling is ook van toepassing voor linker- en rechterlimieten (voor zover deze zinvol zijn).
- De gevallen $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 kunnen herleid worden tot de gevallen $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ en dus soms aangepakt worden met de regel van de l'Hospital.

Voorbeelden ($\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$)

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{e^x - 1} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{e^x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{2x - 3} = -3$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(e^x - e)}{\ln(x-1)} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{e^x - e}\, e^x}{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x(x-1)}{e^x - e} = e \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^x - e} \overset{H}{=} e \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{e^x} = e \cdot \dfrac{1}{e} = 1$

<u>Voorbeelden ($0 \cdot \infty$ en $\infty - \infty$)</u>

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x \sin x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$, want $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

<u>Voorbeelden (0^0, ∞^0 en 1^∞)</u>

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} e^{\ln(x^x)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x} = e^0 = 1$,
  want $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$ (zie hierboven)

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} e^{\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^x\right]} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} e^{x \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}$
  $\overset{H}{=} e^{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x} = e^0 = 1$

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{4}{4x-\pi}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\ln\left[(\tan x)^{\frac{4}{4x-\pi}}\right]} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{4}{4x-\pi}\ln(\tan x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{4\ln(\tan x)}{4x-\pi}}$
  $= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\ln(\tan x)}{4x-\pi}} \overset{H}{=} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{4}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos x}} = e^{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}} = e^2$

Opmerking

De regel van DE L' HOSPITAL is niet altijd de meest aangewezen methode om limieten te berekenen. Beschouw bijvoorbeeld $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$. Deze limiet is gelijk aan 2 (afzonderen hoogstemachtsterm in teller en noemer). Onderzoek zelf of de regel van DE L' HOSPITAL tot ditzelfde resultaat leidt!

3.10 Functieonderzoek

3.10.1 Stijgen en dalen van een functie

Definities

Zij D een deelverzameling van het domein van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We zeggen:

f is *stijgend op* D als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in D : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

f is *strikt stijgend op* D als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in D : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

f is *dalend op* D als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in D : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

f is *strikt dalend op* D als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in D : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Een functie die stijgend (dalend) is op $\mathbb{R}$ noemen we kortweg *stijgend* (*dalend*).

De volgende eigenschappen geven het verband aan tussen het teken van f' en het stijgen en dalen van f over een interval. Zij kunnen bewezen worden aan de hand van de stelling van Lagrange.

Eigenschappen

Voor een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is op een open interval $]a, b[$ gelden volgende uitspraken:

- f stijgend op $]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0$
- f strikt stijgend op $]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f'(x) > 0$
- f dalend op $]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f'(x) \leq 0$
- f strikt dalend op $]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f'(x) < 0$

3.10.2 Convexiteit en concaviteit van een functie

Definities

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu is op $[a, b]$ heet *convex op* $[a, b]$ als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2 : f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu is op $[a, b]$ heet *concaaf op* $[a, b]$ als en slechts als

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2 : f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Opmerkingen

- De grafiek van een convexe functie op $[a, b]$ neemt op dat interval een $\smile$-vorm aan.
- De grafiek van een concave functie op $[a, b]$ neemt op dat interval een $\frown$-vorm aan.

Dat de tweede afgeleide van een functie informatie inhoudt over de convexiteit/concaviteit van deze functie, komt tot uiting in de volgende stelling:

Stelling

Is een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu op $[a, b]$ en tweemaal differentieerbaar op $]a, b[$, dan gelden de volgende uitspraken:

- f convex op $[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f''(x) > 0$
- f concaaf op $[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]a, b[: f''(x) < 0.$

Definitie

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu is in een punt x_0 bereikt een *buigpunt* in dat punt als en slechts als

1) er een gesloten interval $[a, b]$ met $x_0 \in]a, b[$ bestaat zodat f concaaf (convex) is op $[a, x_0]$ en convex (concaaf) op $[x_0, b]$
2) de grafiek van f een raaklijn bezit in het punt $(x_0, f(x_0))$. Deze raaklijn noemt men *buigraaklijn*.

Het punt $(x_0, f(x_0))$ wordt dan een *buigpunt* van (de grafiek van) de functie f genoemd.

Stelling

Voor een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die tweemaal differentieerbaar is in x_0, gelden de volgende uitspraken:

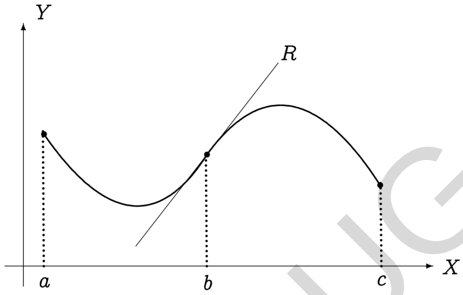
1) f heeft in x_0 een buigpunt $\Leftrightarrow$ f'' verandert van teken in x_0

2) f heeft in x_0 een buigpunt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

3) Is f driemaal differentieerbaar in x_0, dan

$$f''(x_0) = 0 \text{ en } f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ heeft in } x_0 \text{ een buigpunt}$$

De functie in onderstaande figuur is convex op het interval $[a, b]$ en concaaf op het interval $[b, c]$. Ze bezit een buigpunt in het punt b met buigraaklijn R.



Voorbeelden

- De functie $f(x) = x^3$ heeft het punt $(0, 0)$ als buigpunt met buigraaklijn de X-as.
- De functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ heeft het punt $(0, 0)$ als buigpunt met buigraaklijn de Y-as.

3.10.3 Lokale extrema

Definities

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereikt een *lokaal minimum* in $x_0 \in \operatorname{dom} f$ als en slechts als er een open interval I rond x_0 bestaat zodat voor elk punt $x \in I \cap \operatorname{dom} f$ geldt $f(x) \geq f(x_0)$.

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereikt een *lokaal maximum* in $x_0 \in \operatorname{dom} f$ als en slechts als er een open interval I rond x_0 bestaat zodat voor elk punt $x \in I \cap \operatorname{dom} f$ geldt $f(x) \leq f(x_0)$.

Een punt $x_0 \in \operatorname{dom} f$ noemt men een *globaal minimum* als en slechts als voor elk punt $x \in \operatorname{dom} f$ geldt $f(x) \geq f(x_0)$.

Een punt $x_0 \in \operatorname{dom} f$ noemt men een *globaal maximum* als en slechts als voor elk punt $x \in \operatorname{dom} f$ geldt $f(x) \leq f(x_0)$.

Een functie bereikt een lokaal (globaal) *extremum* in een punt indien deze functie een lokaal (globaal) maximum of minimum bereikt in dat punt.

Eigenschappen

1) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu in x_0 en differentieerbaar op $I \setminus \{x_0\}$, waarbij I een open interval is dat x_0 bevat. Indien het teken van f' in $I \cap]x_0, +\infty[$ tegengesteld is aan het teken van f' in $I \cap]-\infty, x_0[$, dan bereikt f een lokaal extremum in x_0.

2) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in een inwendig punt x_0 van $\operatorname{dom} f$. Dan geldt:

$$f \text{ bereikt een lokaal extremum in } x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Opmerkingen

- Bij een tekenverandering van f' in x_0 zal een tekenonderzoek van f' onmiddellijk links en rechts van x_0 de aard van het extremum (minimum of maximum) bepalen.
- In de voorwaarden van eigenschap (1) hoeft f niet differentieerbaar te zijn in x_0 zelf. Beschouw als voorbeeld de functie $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$.
- De omgekeerde pijl in eigenschap (2) geldt niet! Denk hierbij aan de functie $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.
- De voorwaarde in eigenschap (2), nl. x_0 is een inwendig punt van $\operatorname{dom} f$, is noodzakelijk om "randpunten" te vermijden. Beschouw ter illustratie de functie

  $$f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$

  Deze functie bereikt een globaal maximum in 1, maar $f'(1) \neq 0$.

In de volgende stelling wordt informatie omtrent de eerste en tweede afgeleide van een functie gecombineerd om een lokaal extremum vast te stellen:

Stelling

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Dan gelden de volgende uitspraken:

- $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ bereikt een lokaal minimum in x_0
- $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ bereikt een lokaal maximum in x_0

Opmerking

Ook in deze stelling kunnen de implicaties niet omgekeerd worden!

3.10.4 Het schetsen van de grafiek van een functie

Uit het voorgaande volgt dat een verantwoorde schets van de grafiek van een functie berust op een volledig functieonderzoek bestaande uit de volgende stappen:

1) Bepalen van het domein van de functie. Waar is de functie continu? Is de functie even? Oneven? Periodiek?

2) Bepalen van de asymptoten van de functie.

3) Opstellen van een tekenschema van de eerste afgeleide. Waar is de functie stijgend en dalend? Wat zijn de lokale extrema?

4) Opstellen van een tekenschema van de tweede afgeleide. Waar is de functie convex en concaaf? Wat zijn de buigpunten en bijbehorende buigraaklijnen?

5) Opstellen van een samenvattingstabel die alle aspecten uit de vorige punten overzichtelijk weergeeft.

6) Bepalen van enkele punten op de grafiek zoals snijpunten met de assen, lokale extrema, buigpunten, discontinuïteitspunten ...

7) Schetsen van de grafiek op basis van de informatie vergaard in de voorgaande punten.

<u>Voorbeeld 1</u>

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$$

1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. De functie is continu op $\mathbb{R}$, want ze is een veeltermfunctie.

2) VA: geen (want domein is $\mathbb{R}$); SA: geen; HA: geen.

3) $f'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$
Tabel:

x		-2		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. -5	$\nearrow$		$\nearrow$

4) $f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
Tabel:

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	bgp. $-\frac{9}{4}$	$\frown$	bgp. $\frac{7}{4}$	$\smile$

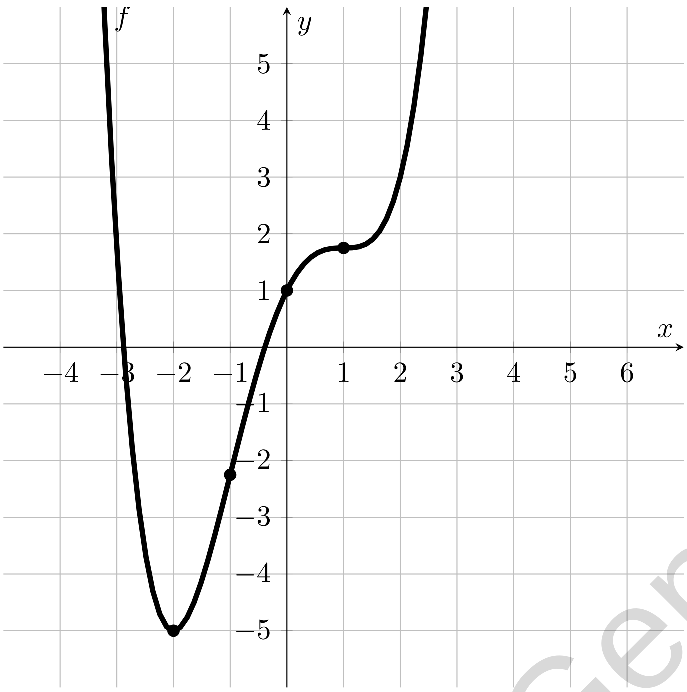
Buigraaklijnen: $y = 4x + \frac{7}{4}$ bij $(-1, -\frac{9}{4})$; $y = \frac{7}{4}$ bij $(1, \frac{7}{4})$.

5) Overzichtstabel:

x		-2		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$ $\smile$	lok. min. -5	$\nearrow$ $\smile$	bgp. $-\frac{9}{4}$	$\nearrow$ $\frown$	bgp. $\frac{7}{4}$	$\nearrow$ $\smile$

6) Enkele belangrijke punten: $f(-2) = -5$ (lok. min.), $f(-1) = -\frac{9}{4}$ (bgp.), $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{7}{4}$ (bgp.).

7) Grafiek:



Voorbeeld 2

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$$

1) dom $f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. De functie is continu op haar domein, want ze is een rationale functie.

2) VA: $x = -1$; SA: geen; HA: $y = 1$.

3) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x+1)^2 - x(x-2)2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^3}$

Tabel:

x		-1		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	lok. min. $-\frac{1}{3}$	$\nearrow$

4) $f''(x) = \dfrac{4(x+1)^3 - 3(x+1)^2\, 4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^6} = \dfrac{-8\left(x-\frac{5}{4}\right)}{(x+1)^4}$

Tabel:

x		-1		$\frac{5}{4}$	
$f''(x)$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	$\vert$	$\smile$	bgp. $-\frac{5}{27}$	$\frown$

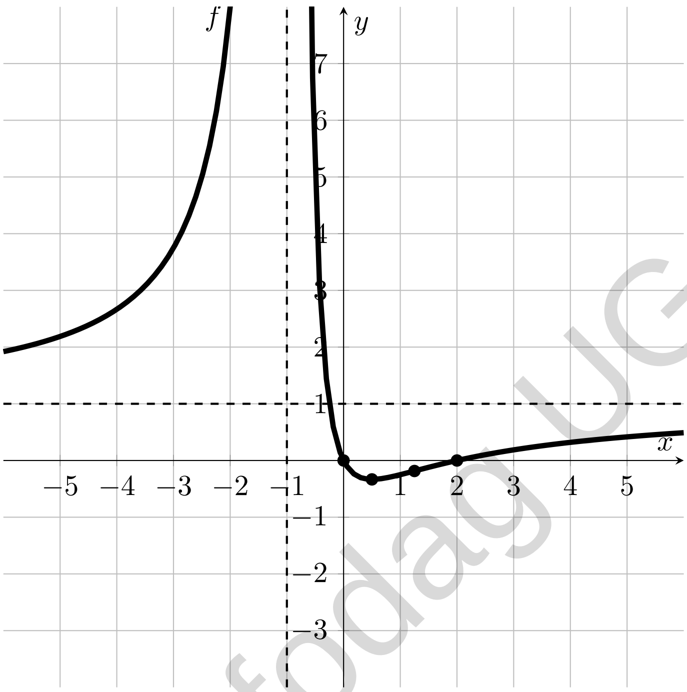
Buigraaklijn: $y = \frac{64}{243}\,x - \frac{125}{243}$.

5) Overzichtstabel:

x		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{4}$	
$f'(x)$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$ $\smile$	$\vert$	$\searrow$ $\smile$	lok. min. $-\frac{1}{3}$	$\nearrow$ $\smile$	bgp. $-\frac{5}{27}$	$\nearrow$ $\frown$

6) Enkele belangrijke punten: $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}$ (lok. min.), $f(\frac{5}{4}) = -\frac{5}{27}$ (bgp.), $f(2) = 0$.

7) Grafiek:



<u>Voorbeeld 3</u>

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1) dom $f = \mathbb{R}$. De functie is continu op haar domein, want ze is de samenstelling van een exponentiële en een veeltermfunctie die beiden continu zijn. Bovendien is de functie even, want $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \text{dom} f$. *Dus het volstaat de functie te onderzoeken op bijvoorbeeld* $\mathbb{R}^+$.

2) VA: geen; SA: geen; HA: $y = 0$.

3) $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tabel:

x	0	
$f'(x)$	0	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$

4) $f''(x) = (-x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = (x^2-1)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Tabel:

x	0		1	
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\frown$	bgp. $e^{-\frac{1}{2}}$	$\smile$

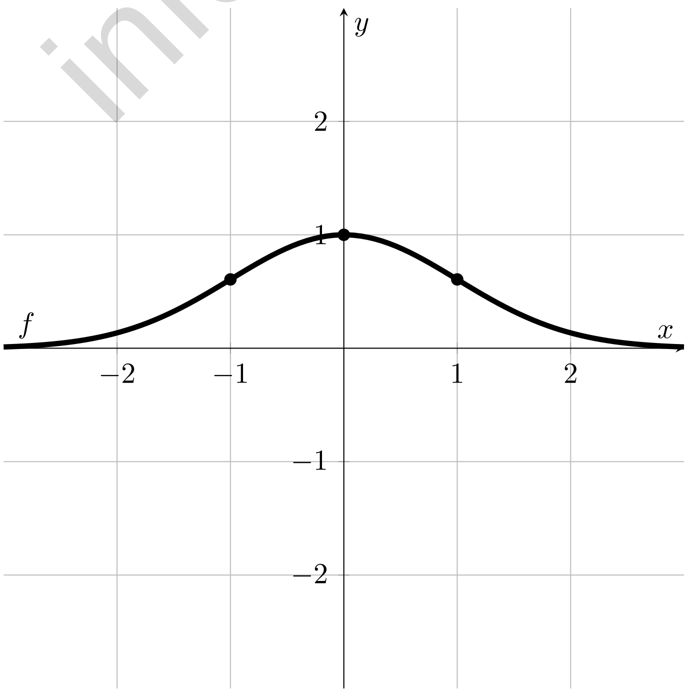
Buigraaklijn: $y = -\frac{1}{e}\, x + \frac{2}{e}$.

5) We kunnen nu een overzichtstabel op gans $\mathbb{R}$ opstellen door verder gebruik te maken van het feit dat de functie even is en dus symmetrisch is t.o.v. de Y-as. Hieruit volgt onder meer dat de functie een globaal maximum in 0 bereikt:

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\smile$	bgp. $e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$ $\frown$	glob. max. 1	$\searrow$ $\frown$	bgp. $e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$ $\smile$

6) Enkele belangrijke punten: $f(0) = 1$ (glob. max.), $f(1) = f(-1) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61$ (bgp.).

7) Grafiek:



3.11 Toepassingen in de economie

3.11.1 Marginaliteit

Volgens de eigenschap van de differentiaal (p. 13) geldt, bij een voldoende kleine verandering Δx van de inputvariabele x, voor de verandering van de functiewaarde $f(x)$:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \qquad (\dagger)$$

Hieruit volgt dat, als de variabele x met precies één eenheid toeneemt, d.w.z. $\Delta x = 1$, de functiewaarde met een bedrag verandert dat "ongeveer" gelijk is aan de afgeleide:

$$f(x + 1) - f(x) \approx f'(x).$$

Definitie
In het kader van het meten van veranderingen wordt de afgeleide $f'(x)$ in de economie de *marginale verandering van de functie* $f(x)$ genoemd.

De uitleg die aan het begrip marginaliteit wordt gegeven is in termen van één bijkomende eenheid. Immers, voor de marginale verandering van de functie $f(x)$ geldt

$$f'(x) \approx f(x + 1) - f(x).$$

De marginale verandering van een kostenfunctie $K(q)$ worden *marginale kosten* genoemd en genoteerd $MK(q)$. Dus $MK(q) = K'(q)$.

De marginale verandering van een opbrengstfunctie $O(q)$ worden *marginale opbrengst* genoemd en genoteerd $MO(q)$. Dus $MO(q) = O'(q)$.

De marginale verandering van een winstfunctie $W(q)$ worden *marginale winst* genoemd en genoteerd $MW(q)$. Dus $MW(q) = W'(q)$.

Voorbeeld (marginale kosten)

Beschouw de totale kostenfunctie van een productieproces

$$K(q) = 0{,}1q^3 - 3q^2 + 35q,$$

waarbij q de geproduceerde hoeveelheid van een bepaald product voorstelt. De marginale kosten worden dan gegeven door

$$MK(q) = 0{,}3q^2 - 6q + 35.$$

Bij een geproduceerde hoeveelheid $q = 10$ bedragen de marginale kosten

$$MK(10) = 0{,}3 \times 10^2 - 6 \times 10 + 35 = 5.$$

Met andere woorden, het verhogen van het productieniveau van 10 naar 11 eenheden kost bij benadering 5 geldeenheden extra.

Opmerking

Dikwijls is de marginale verandering $f'(x)$ van een functie f niet zo'n goede benadering van de reële verandering $f(x+1) - f(x)$. De formule (†) gaat immers enkel op voor "kleine" veranderingen Δx. De systematische studie van de kwaliteit van deze benadering valt echter buiten het bestek van deze cursus. Het volstaat te vermelden dat, voor de kosten-, opbrengst- en winstfuncties die wij zullen ontmoeten, deze benadering wel toereikend is.

3.11.2 Elasticiteit

Waar marginaliteit gebaseerd is op *absolute* veranderingen, heeft elasticiteit betrekking op *relatieve* of *procentuele* veranderingen.

Van absolute naar relatieve veranderingen

Als een prijs p verandert met Δp, dan stelt Δp een absolute verandering voor, het quotiënt $\Delta p/p$ een relatieve verandering en $\%\Delta p = \frac{\Delta p}{p} \times 100$ de bijbehorende procentuele verandering.

Een voorbeeld:

	verandering		
p prijs	Δp absoluut	$\Delta p/p$ relatief	$\%\Delta p$ procentueel
10	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	$0{,}2 \times 100 = 20$
50	2	$\frac{2}{50} = 0{,}04$	$0{,}04 \times 100 = 4$
100	2	$\frac{2}{100} = 0{,}02$	$0{,}02 \times 100 = 2$

Het voordeel van het werken met een relatieve of procentuele verandering t.o.v. een absolute verandering, is dat de eerstgenoemden onafhankelijk zijn van de gekozen eenheden. Bijvoorbeeld, een prijsverhoging van €1 naar €1,25 is een toename met 25%, ongeacht er in US Dollars, Britse Ponden of Euro's gerekend wordt.

Elasticiteit: definitie en eigenschappen

Algemeen, als de inputvariabele x in $f(x)$ verandert met Δx en daarmee de functiewaarde $f(x)$ wijzigt met $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, dan is $\Delta x/x$ de *relatieve* verandering van x en $\Delta f(x)/f(x)$ de corresponderende *relatieve* verandering van $f(x)$. Het quotiënt van de relatieve veranderingen van $f(x)$ en x, nl.

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \Big/ \frac{\Delta x}{x} \tag{*}$$

stelt de gemiddelde relatieve verandering van $f(x)$ voor onder invloed van een relatieve verandering $\Delta x/x$ van de inputvariabele. Merk op dat we, door de teller en noemer in (*) met 100 te vermenigvuldigen, het quotiënt (*) ook kunnen schrijven als een quotiënt van procentuele veranderingen:

$$\frac{\%\Delta f(x)}{\%\Delta x}. \tag{**}$$

Omdat $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$ voor kleine waarden van Δx, geldt voor (*) en (**) achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \frac{\%\Delta f(x)}{\%\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \Big/ \frac{\Delta x}{x} &\approx \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} \Big/ \frac{\Delta x}{x} \\ &= \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} \cdot \frac{x}{\Delta x} \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}\, x. \end{aligned}$$

De uitdrukking $\frac{f'(x)}{f(x)}\, x$ (voor zover deze bestaat) is niets anders dan de limiet voor $\Delta x \to 0$ van de quotiënten (*) en (**). Dit motiveert de volgende definitie:

Definitie

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in $x_0 \neq 0$ en onderstel $f(x_0) \neq 0$. Dan heet de limiet

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \Big/ \frac{\Delta x}{x_0}$$

de *(punt)elasticiteit van* f *in* x_0 en wordt genoteerd als $\varepsilon_f(x_0)$.

Per definitie hebben we dus

$$\varepsilon_f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} \Big/ \frac{\Delta x}{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\%\Delta f(x_0)}{\%\Delta x_0}$$

waarbij $\%\Delta f(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)} \times 100$ en $\%\Delta x_0 = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100$.

Eigenschap (basisregel)

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in $x_0 \neq 0$ en onderstel $f(x_0) \neq 0$. Dan

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\, x_0$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \Big/ \frac{\Delta x}{x_0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \end{aligned}$$ □

Definitie

De *elasticiteitsfunctie* van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ is de functie

$$\varepsilon_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \varepsilon_f(x).$$

Voorbeelden

- Voor $f(x) = x^2$ is $\varepsilon_f(x) = \dfrac{(x^2)'}{x^2}\, x = \dfrac{2x}{x^2}\, x = 2.$
- Voor $f(x) = e^{3x}$ is $\varepsilon_f(x) = \dfrac{(e^{3x})'}{e^{3x}}\, x = \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}}\, x = 3x.$

Eigenschappen (rekenregels)

1)
$$\begin{array}{lcl} f(x) = c & \Rightarrow & \varepsilon_f(x) = 0 \\ f(x) = x & \Rightarrow & \varepsilon_f(x) = 1 \\ f(x) = a\,x^b & \Rightarrow & \varepsilon_f(x) = b \\ f(x) = a\,e^{bx} & \Rightarrow & \varepsilon_f(x) = bx \end{array}$$

2) $\varepsilon_{f+g}(x) = \dfrac{f(x)\,\varepsilon_f(x) + g(x)\,\varepsilon_g(x)}{f(x) + g(x)}$

3) $\varepsilon_{fg}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$

4) $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$

5) $\varepsilon_{f^{-1}}(x) = \dfrac{1}{\varepsilon_f(f^{-1}(x))}$

6) $\varepsilon_{g\circ f}(x) = \varepsilon_g(f(x)) \cdot \varepsilon_f(x)$

Het bewijs van deze rekenregels steunt rechtstreeks op de basisregel (p. 27) en op de differentieerregels.

Eigenschap van de elasticiteit

Voor een procentuele verandering $\%\Delta f(x)$ van de functiewaarde $f(x)$, die het resultaat is van een "kleine" procentuele verandering $\%\Delta x$ van de inputvariabele x, geldt:

$$\%\Delta f(x) \approx \varepsilon_f(x) \cdot \%\Delta x$$

Deze eigenschap vertelt ons dat, als de variabele x met één procent toeneemt (d.w.z. $\%\Delta x = 1$), de procentuele verandering van de functiewaarde *bij benadering* gelijk is aan de elasticiteit $\varepsilon_f(x)$.

Voorbeeld

Onderstel dat de vraag naar een goed een functie is van de prijs, gegeven door

$$q = f(p) = \frac{100}{p-1}.$$

Omdat $f'(p) = -\dfrac{100}{(p-1)^2}$, is de formule voor de elasticiteit achtereenvolgens te schrijven als

$$\varepsilon_f(p) = \frac{f'(p)}{f(p)}\, p = \frac{-100/(p-1)^2}{100/(p-1)}\, p = -\frac{p}{p-1}.$$

Bij een prijs van € 5 is dus $\varepsilon_f(5) = -5/(5-1) = -1{,}25$, wat betekent dat de vraag *bij benadering* 1,25% afneemt indien de prijs met 1% toeneemt (dus stijgt van € 5 naar € 5,05).

Grafische interpretatie

Een interessante grafische interpretatie[1] kan aan $\varepsilon_f(x)$ gegeven worden wanneer f een dalende[2] functie voorstelt.

In figuur 3.1 beschouwen we de punten $\underline{a}(x,0)$, $\underline{b}(x,f(x))$ en $\underline{c}(u,0)$, waarbij $\underline{c}$ het snijpunt met de X-as is van de raaklijn R aan de grafiek van f in het punt $\underline{b}$.

Uit de meetkundige interpretatie van de afgeleide volgt

$$f'(x) = \text{rico}(R) = \frac{0 - f(x)}{u - x},$$

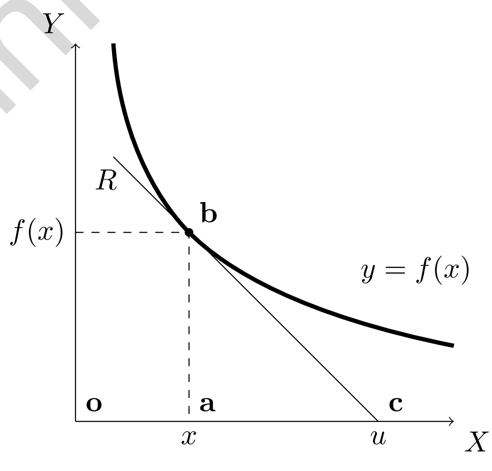
zodat, via de basisregel van elasticiteit,

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,x = \frac{\frac{-f(x)}{u-x}}{f(x)}\,x = -\frac{x}{u-x}.$$

M.a.w.

$$\varepsilon_f(x) = -\frac{|\underline{oa}|}{|\underline{ac}|},$$

waarbij $|\underline{oa}|$ en $|\underline{ac}|$ de lengtes zijn van de lijnstukken $[\underline{oa}]$ en $[\underline{ac}]$.



Figuur 3.1: $\varepsilon_f(x) = -\frac{|\underline{oa}|}{|\underline{ac}|}$

[1] ontleend aan de econoom A. Marshall

[2] zoals een typische vraagfunctie $q = V(p)$

Voorbeeld

Zij $f(x) = a - bx$ $(a, b > 0,\ 0 \leq x \leq \frac{b}{a})$. Voor welke waarde(n) van x geldt $\varepsilon_f(x) = -1$? $\varepsilon_f(x) > -1$? $\varepsilon_f(x) < -1$?.

Oplossing. In dit geval is het punt $\underline{c}$ onafhankelijk van x en steeds gelijk aan het punt $(\frac{a}{b}, 0)$. We vinden dan dat

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_f(x) = -1 &\Leftrightarrow |\underline{oa}| = |\underline{ac}| \Leftrightarrow x = \frac{a}{2b} \\
\varepsilon_f(x) > -1 &\Leftrightarrow |\underline{oa}| < |\underline{ac}| \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{a}{2b} \\
\varepsilon_f(x) < -1 &\Leftrightarrow |\underline{oa}| > |\underline{ac}| \Leftrightarrow \frac{a}{2b} < x \leq \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

◄

3.11.3 Verband tussen opbrengst en elasticiteit van de vraagfunctie

In de economie zegt men dat een vraagfunctie elastisch is indien de vraag relatief gevoelig is t.o.v. prijswijzigingen en inelastisch wanneer zij ongevoelig is t.o.v. van dergelijke prijswijzigingen.

Aangezien een vraagfunctie $q = V(p)$ dalend is, geldt $\varepsilon_V(p) \leq 0$ en dus

$$\varepsilon_V(p) < -1 \Leftrightarrow |\varepsilon_V(p)| > 1.$$

Definities

Een vraagfunctie $q = V(p)$ heet *elastisch* in het punt p_0 als en slechts als $\varepsilon_V(p_0) < -1$, of nog, $|\varepsilon_V(p_0)| > 1$.

Een vraagfunctie $q = V(p)$ heet *inelastisch* in het punt p_0 als en slechts als $\varepsilon_V(p_0) > -1$, of nog, $|\varepsilon_V(p_0)| < 1$.

Een vraagfunctie $q = V(p_0)$ heet *eenheidselastisch* in het punt p als en slechts als $\varepsilon_V(p_0) = -1$, of nog, $|\varepsilon_V(p_0)| = 1$.

We beschouwen nu de invloed van prijswijzigingen op de opbrengst. Differentiatie van de opbrengstfunctie

$$O(p) = p\,q = p\,V(p)$$

leidt tot

$$
\begin{aligned}
O'(p) &= \big(p\,V(p)\big)' \\
&= V(p) + p\,V'(p) \\
&= V(p)\left(1 + p\,\frac{V'(p)}{V(p)}\right) \\
&= V(p)\big(1 + \varepsilon_V(p)\big). \qquad (\dagger)
\end{aligned}
$$

Hieruit kunnen nu de volgende conclusies getrokken worden:

- Is de vraagfunctie $q = V(p)$ elastisch in de prijs p_0, dan volgt uit vgl. (†) dat $O'(p_0) < 0$, m.a.w. de opbrengstfunctie is strikt dalend in p_0.

  Algemeen geformuleerd: Wanneer de vraagfunctie in een bepaalde prijs elastisch is, dan leidt een prijsverhoging daar tot een daling van de opbrengst en een prijsverlaging tot een stijging van de opbrengst.

- Is de vraagfunctie $q = V(p)$ inelastisch in de prijs p_0, dan volgt uit vgl. (†) dat $O'(p_0) > 0$, m.a.w. de opbrengstfunctie is strikt stijgend in p_0.

  Algemeen geformuleerd: Wanneer de vraagfunctie in een bepaalde prijs inelastisch is, dan leidt een prijsverhoging daar tot een stijging van de opbrengst en een prijsverlaging tot een daling van de opbrengst.

- Is de vraagfunctie $q = V(p)$ eenheidselastisch in de prijs p_0, dan volgt uit vgl. (†) dat $O'(p_0) = 0$. Een verder onderzoek van de opbrengstfunctie (d.m.v. het teken van $O''(p_0)$ of een tekenonderzoek van $O'(p)$ rond p_0) is dan noodzakelijk om vast te stellen of de opbrengst al dan niet een lokaal extremum bereikt in p_0.

<u>Voorbeeld</u>

Onderstel dat de vraagfunctie van een bepaald consumptiegoed gegeven is door

$$q = V(p) = 120 - 0{,}1\,p^2 \quad (\text{met } 0 \leq p \leq \sqrt{1200}).$$

We hebben

$$\varepsilon_V(p) = \frac{-0{,}2\,p}{120 - 0{,}1p^2}\,p = -\frac{2p^2}{1200 - p^2}.$$

De vraag is eenheidselastisch in een prijs p waarbij

$$-\frac{2p^2}{1200 - p^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = 1200 - p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad p = \pm 20.$$

Enkel $p = 20$ is economisch relevant en behoort tot het betekenisvol domein $[0, \sqrt{1200}]$ van de vraagfunctie.

Om de intervallen te vinden waarop de vraagfunctie (in)elastisch is, lossen we de volgende ongelijkheid op:

$$\begin{aligned}
-\frac{2p^2}{1200 - p^2} > -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2p^2}{1200 - p^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2p^2 < 1200 - p^2 \quad (\text{want } 1200 - p^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad p^2 < 400 \\
&\Leftrightarrow \quad -20 < p < 20 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq p < 20 \quad (\text{want } p \geq 0 \text{ ondersteld})
\end{aligned}$$

Dus de vraagfunctie is inelastisch op het interval $[0, 20[$ en elastisch op het interval $]20, \sqrt{1200}]$.

Dit betekent dat de opbrengstfunctie stijgt met toenemende p indien $p \in [0, 20[$ en daalt met toenemende p indien $p \in]20, \sqrt{1200}]$.

Schematisch:

p	0		20		$\sqrt{1200}$
$\varepsilon_V(p)$	> -1	> -1	-1	< -1	< -1
$O(p)$	$\nearrow$	$\nearrow$	rel. max	$\searrow$	$\searrow$

Bijgevolg moet de opbrengst een lokaal maximum bereiken in $p = 20$.